第 1 节 向量的基本运算（★★）

强化训练

1．（★）（多选）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则存在唯一实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

（B）若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线是异面直线，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 一定不共面

（C）若 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量

（D）若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则“$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线”的充分不必要条件

答案：CD

解析：A 项，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，满足 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，但不存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，故 A 项错误；

B 项，向量可以平移，所以任意两个向量都是共面的，故 B 项错误；

C 项，首先，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，因为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}>0$，所以 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；其次，$\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$；故 C 项正确；

D 项，若 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，充分性成立；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，我们知道 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 和 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 分别表示与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量，所以当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 是方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 相同，且长度为 2 的向量，从而 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\neq\boldsymbol{0}$，必要性不成立；故 D 项正确.

2．（2023•山西临汾模拟•★）已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则（　　）

（A）A，B，C 三点共线　（B）A，B，D 三点共线

（C）B，C，D 三点共线　（D）A，C，D 三点共线

答案：B

解析：A 项，要判断 A，B，C 三点是否共线，可判断 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是否共线，

由题意，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，

二者 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的系数不成比例，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线，从而 A，B，C 三点不共线，故 A 项错误；

B 项，由题意，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})+(3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，

从而 A，B，D 三点共线，故 B 项正确；同理可得 C、D 两项错误.

3．（2022 • 全国乙卷 • ★）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$（　　）

（A）-2　（B）-1　（C）1　（D）2

答案：C

解析： 看到$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$，想到将其平方可产生$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

由题意，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1^2+4\times(\sqrt{3})^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.

4.（★★）（多选）下列命题正确的是（　　）

（A）$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

（B）若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（C）$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$是$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线的充要条件

（D）若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，且$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向

答案： ABD

解析： 涉及模的问题，考虑将其平方来看，

A 项，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||^2\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2\le$

$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+$

$2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\le\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta\le|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ ①，

其中θ为$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角，

因为$-1\le\cos\theta\le1$，$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\ge0$，所以式①成立，故 A 项正确；

B 项，因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，

从而$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

又$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 B 项正确；

C 项，若$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则$(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，

所以$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

整理得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，即$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，

此时$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$中至少有一个为零向量或$\theta=\pi$，

均满足$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，充分性成立，

若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，当它们同向且都为非零向量时，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\ne|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，必要性不成立，故 C 项错误；

D 项，将$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$平方可得$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，所以$\cos\theta=1$，故$\theta=0^\circ$，

所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向，故 D 项正确.

5.（2022·陕西西安模拟·★）已知向量$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$，且$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，则实数$\lambda=$_____.

答案： $\sqrt{2}$

解析： 涉及向量垂直，用数量积为 0 处理，

因为$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，所以$(\lambda\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^2=\lambda|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-|\boldsymbol{a}|^2=\lambda\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2^2=0$，解得：$\lambda=\sqrt{2}$.

6.（★★）若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$满足$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，则$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=$_____.

答案：$-\dfrac{3}{5}$

解析：将所给的向量等式移项，平方即可产生$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，

因为$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以$-5\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，故$25|\boldsymbol{c}|^2=9|\boldsymbol{a}|^2+16|\boldsymbol{b}|^2+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

结合$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$可得$25=25+24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，同理，由$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$可得$-4\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}$，

同时平方可求得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{5}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{5}$.

7.（2023·江苏高邮模拟改·★★★）已知非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=4$，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的取值范围为$[-2,2]$，则向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$的取值范围是（　　）

（A）$[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$　（B）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$　（C）$[0,\dfrac{2\pi}{3}]$　（D）$[0,\dfrac{5\pi}{6}]$

答案：A

解析：条件涉及向量垂直，可用数量积为 0 来翻译，

因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$，

从而$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，故$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，又$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=4$，所以$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，

涉及夹角，一般考虑夹角余弦公式，

所以$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{4}$，由题意，$-2\le\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le 2$，

所以$-\dfrac{1}{2}\le\cos\theta\le\dfrac{1}{2}$，结合$\theta\in[0,\pi]$可得$\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{2\pi}{3}$.

8.（2023·安徽模拟·★★★）已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是单位向量，且它们的夹角为θ，若$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|\ge\dfrac{1}{2}(t\in\mathbf{R})$，则$\theta$的取值范围为（　　）

（A）$[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$　（B）$[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$　（C）$[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$　（D）$[0,\dfrac{\pi}{6}]$

答案：C

解析：条件涉及$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$，想到将其平方，即可产生$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，出现夹角余弦，

因为$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|\ge\dfrac{1}{2}$，所以$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+t^2\boldsymbol{b}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+t^2+2t\cos\theta\ge\dfrac{1}{4}$，故$t^2+(2\cos\theta)t+\dfrac{3}{4}\ge 0$，

所以$\Delta=(2\cos\theta)^2-4\times 1\times\dfrac{3}{4}\le 0$，解得：$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\cos\theta\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合$\theta\in[0,\pi]$可得$\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{5\pi}{6}$.